



Estimation automatique de l'orientation relative: une approche directe basée sur la résolution de systèmes polynomiaux multivariables

Mahzad Kalantari, Franck Jung, Nicolas Paparoditis, Jeanpierre Guédon

► To cite this version:

Mahzad Kalantari, Franck Jung, Nicolas Paparoditis, Jeanpierre Guédon. Estimation automatique de l'orientation relative: une approche directe basée sur la résolution de systèmes polynomiaux multivariables. *Revue Française de Photogrammétrie et de Télédétection*, 2009, 189, pp.3-16. hal-00386471

HAL Id: hal-00386471

<https://hal.science/hal-00386471>

Submitted on 21 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation automatique de l'orientation relative: une approche directe basée sur la résolution de systèmes polynomiaux multivariables

Mahzad Kalantari^{1, 2, 3}, **Franck Jung**⁴, **Nicolas Paparoditis**¹, **JeanPierre Guedon**^{2, 3}

¹Laboratoire MATIS, Institut Géographique National, École Nationale des Sciences Géographiques (ENSG),
6 - 8 avenue Blaise Pascal Cite Descartes, Champs-sur-Marne F 77 455 MARNE LA VALLEE CEDEX 2
Tel : 01 64 15 31 65
E-mail: mahzad.kalantari @ign.fr, nicolas.paparoditis@ign.fr

² Equipe IVC, Institut Recherche Communications Cybernétique de Nantes (IRCCyN) UMR CNRS 6597
E-mail: jean-pierre.guedon@polytech.univ-nantes.fr

³ Institut de Recherche sur les Sciences et Techniques de la Ville CNRS FR 2488

⁴ DDE - Seine Maritime
E-mail: Franck.Jung@equipement.gouv.fr

Résumé

Le calcul de l'orientation relative entre deux positions successives d'une caméra, à l'aide des points d'intérêts, est un problème clé aussi bien en photogrammétrie qu'en vision par ordinateur. Dans cet article une nouvelle méthode de résolution directe de la rotation et la translation, à partir de 5 points, est présentée. Cette méthode ne passe pas par un calcul de la matrice essentielle, mais plutôt par une résolution polynomiale directe dont les paramètres sont la rotation et la translation, en utilisant les bases de Gröbner, et se comporte correctement même avec des points coplanaires. Cette méthode est également satisfaisante pour des images panoramiques, ce qui représente un réel avantage par rapport à la plupart des techniques basées sur la matrice essentielle.

Mots-clés: vision par ordinateur, estimation de pose, orientation relative, équation de coplanarité, solution directe, base de Gröbner

Abstract

The calculation of the relative orientation for two successive positions of a camera with the help of the points of interests is the basis of key photogrammetric applications as well as computer vision ones. In this article is presented a new method of direct resolution of the rotation and the translation from 5 points. This method does not use the essential matrix, but requires a polynomial resolution, using the bases of Gröbner, and behaves correctly with coplanar points. This method is also suitable for panoramic images, which is a significant comparative advantage.

Keywords: computer vision, pose estimation, relative orientation, coplanarity equation, close form solutions, Gröbner basis

1. Introduction

Le calcul des paramètres extrinsèques (orientation et position) de la caméra à partir de plusieurs vues à l'aide des points d'intérêts est la base de pratiquement toutes les applications aussi bien du domaine de la photogrammétrie, que de celui de la vision par ordinateur. Bien que le problème soit le même pour ces deux communautés, chacune a proposé une approche différente afin de calculer la position et l'attitude des caméras au moment des acquisitions de prises de vues.

L'inconvénient majeur de l'approche photogrammétrique, qui est basée sur la condition de colinéarité, est du à la non-linéarité du problème, et qui dit problème non-linéaire dit nécessité de disposer de valeurs approchées autour desquelles on opère une linéarisation de la fonction analytique que l'on cherche à minimiser. Dans le cas de la photogrammétrie aérienne [MOFFIT80] [WOLF00] [KASSER01], les valeurs initiales sont très simples à estimer en raison de la régularité d'échantillonnage spatial et des axes quasi-verticaux des clichés. En plus, l'avion ne subit que de faibles variations de rotation, et un ensemble de points d'appui peut toujours être obtenu.

En applications terrestres la détermination de ces valeurs initiales devient plus hasardeuse, c'est pour cela que la communauté de vision par ordinateur depuis plusieurs années s'est intéressée au calcul des paramètres extrinsèques de la caméra à l'aide d'équations linéaires. Le modèle employé est alors basé sur la condition de coplanarité. La contrainte de coplanarité a été durablement exploitée par la communauté de vision par ordinateur. Longuet-Higgins [LONGUET81] publia la première fois en 1981 la notion de matrice essentielle (E).

En utilisant la matrice essentielle (E) la condition de coplanarité devient linéaire. Résoudre l'orientation relative revient donc à estimer les 9 éléments de la matrice essentielle. En fait 8 points suffisent pour résoudre le système, car l'estimation se fait à une échelle près. La matrice essentielle suppose que la calibration de la caméra est disponible. Cette résolution bien qu'efficace en termes de calcul, ajoute 3 degrés de liberté de plus à l'orientation relative, nous rappelons que l'orientation relative n'a que 5 degrés de liberté. Un autre inconvénient majeur est qu'elle ne peut fonctionner si tous les points homologues sont coplanaires dans l'espace objet, ce qui peut très bien arriver par exemple sur des façades. Beaucoup de recherches au sein de la communauté de vision par ordinateur ont été faites pour réduire le degré de liberté de la matrice essentielle et réduire au strict minimum le nombre de points homologues requis, d'ailleurs les différentes méthodes de résolution de la matrice essentielle ont pour nom ce nombre de points homologues minimum. On peut ainsi citer les méthodes des 8 points [LONGUET81] [HARTLEY03] [MA04], 7 points [STURM1869], 6 points [PHILIP96] et plus récemment 5 points. Nous ne nous intéressons par la suite qu'aux méthodes de 5 points, qui représentent le nombre minimal possible.

Il a été pour la première fois démontré par Kuppra [KUPPRA13] en 1913 que la résolution directe de l'orientation relative à partir de 5 points contenait en général 11 solutions au plus. La méthode décrite par celui-ci consistait à trouver toutes les intersections de deux courbes de degré 6. Malheureusement en son temps sa méthode n'a pu donner lieu à une implémentation numérique. Plus récemment dans [DEMAZURE88] [FAUGERAS90] [FAUGERAS93] [MAYBANK93] [HEYDEN99] il a été démontré que le nombre de solutions est en général égal à 10, incluant les solutions complexes. Triggs [TRIGGS00] a donné une version détaillée pour une implémentation numérique. Philip [PHILIP96] a présenté en 1996 une solution utilisant un polynôme de degré 13, et donné par ailleurs une méthode numérique pour résoudre son système. Les racines de son polynôme donnent directement l'orientation relative. L'idée de Philip a été reprise en 2004 par Nister [NISTER04] qui a affiné cet algorithme. Depuis, nombre d'articles ont essayé de donner des améliorations à la méthode de Nister, notamment Stewenius [STEWENIUS06] qui a donné une résolution polynomiale à l'aide des bases de Gröbner. D'autres articles ont proposé quelques modifications de la méthode de Nister en vue d'une amélioration numérique, ou bien d'une simplification d'implémentation [LI06], [Hongdong06], [SARKIS07], [BATRA07].

Les résolutions de l'orientation relative citées ici sont toutes basées sur les propriétés de la matrice essentielle.

La méthode que nous proposons [Kalantari08] ne passe pas par l'intermédiaire de cette matrice essentielle, et utilise une résolution polynomiale. Les méthodes citées précédemment font en effet appel à un calcul de tous les éléments de la matrice essentielle, pour ensuite procéder à une décomposition classique de type

SVD (Singular Value Decomposition) afin d'isoler finalement la translation et la rotation entre les deux images. Ici, la translation et la rotation sont directement les inconnues de notre système.

En effet, en exprimant la rotation sous forme de quaternions, il apparaît clairement que les équations de colinéarité ou de coplanarité sont des polynômes. Différents algorithmes de résolution des systèmes polynomiaux ont été proposés tout au long de l'histoire des mathématiques. Dans les 20 dernières années, des avancées remarquables ont été faites dans le domaine de la résolution algébrique, ce qui est directement corrélé avec les progrès en informatique et l'augmentation des puissances de calcul disponibles. Une des principales méthodes qui permet ce type de résolution est connue sous le nom de bases de Gröbner. L'idée sous-jacente aux bases de Gröbner est une généralisation de la division euclidienne à des situations avec plusieurs variables.

Une de ces méthodes fait l'objet de la présente étude. Le but de ce papier est de montrer qu'avec une résolution polynomiale directe, il est tout à fait possible de donner une solution aux équations de coplanarité. Cette méthode peut en particulier aussi traiter les couples stéréoscopiques à bases même très courtes entre les images successives, elle peut donc être ainsi également utilisée pour la reconstruction d'images panoramiques. C'est son avantage principal par rapport aux autres méthodes. Par ailleurs, elle parvient aussi à fournir un résultat satisfaisant même si tous les points entrant dans le calcul sont coplanaires ce qui n'est pas le cas avec les autres méthodes de résolutions de 5 points [SEGVIC07]

Le reste du papier est organisé de la manière suivante : dans la section 2 la géométrie de l'orientation relative avec l'aide de la contrainte de coplanarité ainsi que son extension polynomiale sont décrites. Dans la section 3, la résolution du système polynomial avec l'aide des bases de Gröbner est détaillée. L'algorithme de résolution de l'orientation relative est présenté dans la section 4. Pour conclure, dans la partie 5, la présente méthode est comparée à la méthode de résolution, dite des 5 points, de Stewenius, qui a fait l'objet de publications très récentes, et dont les codes de calcul sont publics.

2. Géométrie de l'orientation relative à l'aide de la contrainte de coplanarité et formulation polynomiale.

Avant de poursuivre, il est important de préciser que l'ensemble des paramètres dits intrinsèques (focale et point principal d'autocollimation) ainsi que la distorsion, sont supposés déterminés préalablement. L'étape de l'orientation relative consiste donc à retrouver, comme son nom l'indique, la translation et la rotation relative entre deux clichés possédant une partie commune. En général, la position de la première caméra est prise comme origine du système terrain S_1 (Figure 1) et donc la position de la deuxième caméra (S_2) est calculée par rapport à la première. Afin de formaliser cette géométrie,

plusieurs méthodes existent. L'une d'entre elles, qui est pratiquée en photogrammétrie aérienne depuis près d'un siècle, est la condition de colinéarité. La colinéarité relie le point terrain A à son projeté a dans l'image de gauche et a' dans l'image de droite. Les inconnues de cette modélisation sont la rotation et la translation relative entre les deux clichés (ce que nous appellerons par la suite les paramètres externes) ainsi que les coordonnées 3D du point A. L'avantage majeur de cette formulation est que la résolution du système, en plus de fournir les paramètres externes, donne les coordonnées 3D de tous les points de liaison. En résumé, avec la contrainte de colinéarité, pour n couples de points homologues, on a $5 + 3n$ inconnues.

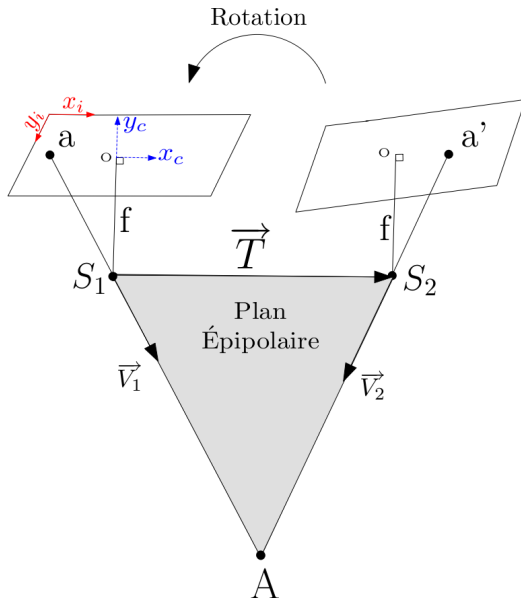


Figure 1 : Le vecteur de translation \vec{T} est la base qui relie les centres optiques des caméras (S_1 et S_2). O est le point principal d'autocollimation (ppa). Les images du point terrain A sur les 2 images sont a et a' . (S_1 , S_2 , A) forment ce que l'on appelle un plan épipolaire.

Une autre façon de modéliser l'orientation relative est connue sous le nom de condition de coplanarité. Cette contrainte a été beaucoup utilisée par la communauté de vision par ordinateur depuis trois décennies. Comme on le voit sur la Figure 1, la condition de coplanarité entre deux images exprime le fait que le vecteur de visée depuis le premier sommet de prise de vue \vec{V}_1 , le vecteur de visée depuis le deuxième sommet de prise de vue exprimé dans le référentiel du premier \vec{V}_2 , ainsi que le vecteur de la translation \vec{T} se trouvent dans le même plan, qui est appelé le plan épipolaire. On peut traduire cette condition par un produit mixte nul entre ces 3 vecteurs. En d'autres termes :

$$\vec{V}_1^t \cdot (\vec{R} \vec{V}_2 \wedge \vec{T}) = 0 \quad (1)$$

En exprimant le produit vectoriel de manière algébrique l'équation (1) peut être simplifiée dans sa forme matricielle équivalente :

$$\begin{bmatrix} x_{a1} & y_{a1} & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & T_z & -T_y \\ -T_z & 0 & T_x \\ T_y & -T_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a2} \\ y_{a2} \\ f \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Il existe plusieurs manières de représenter les rotations. Pendant longtemps en photogrammétrie analogique les angles d'Euler ont été employés. Avec la photogrammétrie numérique, il est plus judicieux d'employer une représentation vecteur et angle [KASSER01], ou avec les quaternions. La manipulation numérique de la matrice rotation est beaucoup plus simple avec les quaternions. La matrice de rotation correspondant au quaternion Q de la forme: $Q = a + b i + c j + d k$ (où a, b, c, d sont des nombres réels) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 - 2c^2 - 2d^2 & 2bc - 2da & 2bd + 2ca \\ 2bc + 2da & 1 - 2b^2 - 2d^2 & 2cd - 2ba \\ 2bd - 2ca & 2cd + 2ba & 1 - 2b^2 - 2c^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

avec la condition que la norme de Q c'est-à-dire $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$ doit être égale à 1. En remplaçant la matrice de rotation dans l'équation (2) on aboutit à un polynôme de degré 3 :

$$\begin{aligned} & -2x_2y_1Tzc^2 - 2x_2y_1Tzd^2 + 2y_2x_1Tzcb^2 + 2y_2x_1Tzd^2 - x_2fTy + x_2y_1Tz - 2x_2x_1Tzcb - 2x_2x_1Tzda + 2x_2x_1Tybd - 2x_2x_1Tyca - 2x_2y_1Txbd + 2x_2y_1Txca - y_2x_1Tz + 2y_2x_1Ty cd + 2y_2x_1Tyba + 2y_2y_1Tzcb - 2y_2y_1Tzda - 2y_2y_1Tx cd - 2y_2y_1Txba - f y_1Tx + y_2fTx + f x_1Ty + 2x_2fTy c^2 + 2x_2fTy d^2 - 2y_2fTx b^2 - 2y_2fTx d^2 - 2y_2fTy cb + 2y_2fTy da - 2f^2Ty bd - 2f^2Ty ca + 2f^2Tx cd - 2f^2Tx ba - 2fx_1Ty b^2 - 2fx_1Ty c^2 + 2fy_1Tx b^2 + 2fy_1Tx c^2 - 2fx_1Tz cd + 2fx_1Tz ba + 2fy_1Tz bd + 2fy_1Tz ca + 2x_2fTx cb + 2x_2fTx da = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Il est clair que dans l'équation (4) les inconnues sont les éléments du quaternion (a, b, c, d) et la translation (T_x, T_y, T_z) ce qui en fait 7 inconnues. Pour chaque couple de points la relation (4) qui est en fait un polynôme est établie. Comme cela a été dit, une contrainte de normalisation sur le quaternion doit impérativement être rajoutée. En orientation relative, l'échelle ne peut être estimée ce qui implique que le vecteur de translation n'a que deux degrés de liberté. Il est tout à fait possible de contraindre un des éléments du vecteur de la translation, par exemple rajouter comme contrainte que T_x soit égal à 1. Mais ce choix ne s'avère pas judicieux surtout en photogrammétrie terrestre où il

peut y avoir des angles forts de rotation sur les axes Y et Z, ce qui par ailleurs n'était pas le cas en photogrammétrie aérienne. Dans cette optique, la seule contrainte qui semble adaptée à rajouter aux systèmes d'équations est la contrainte de vecteur unitaire pour la translation. Avec cette contrainte, il est démontré qu'il est tout à fait possible de gérer la stéréo avant-arrière (translation en Z) ainsi que les faibles translations, cas des images panoramiques par exemple.

Dans le cas d'une translation nulle, il est facile de montrer que la bonne rotation est trouvée par la résolution du système présenté. Ensuite, un critère sur les points terrains permet de vérifier qu'il s'agit bien de ce cas. Ce point diffère sensiblement de la plupart des méthodes utilisées en robotique où une étude de cas a priori est nécessaire pour traiter la translation nulle ou bien le cas de points coplanaires. La présente modélisation permet de traiter tous les cas et passe par la résolution d'un même système.

En résumé, nous avons écrit les 5 équations d'observations, et rajouté 2 contraintes. Les racines de ce système sont les paramètres d'orientation relative, à savoir les 4 paramètres du quaternion (a, b, c, d) et les 3 paramètres de la translation (T_x , T_y , T_z).

3. Résolution des systèmes polynomiaux

3.1. Introduction aux bases de Gröbner et à la résolution des systèmes polynomiaux

L'étude des systèmes polynomiaux peut être effectuée par l'emploi des bases de Gröbner. Généralisant la division euclidienne, le calcul du PGCD et l'élimination de Gauss, les bases de Gröbner furent développées initialement par B. Buchberger dans les années 60 [BUCHBERGER65]. La résolution d'un système polynomial consiste à trouver les zéros d'un système non linéaire polynomial du type $f(x) = 0$ avec $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, où f_i est un polynôme à l variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$.

En photogrammétrie, de nombreux systèmes d'équations sont polynomiaux. On peut citer les équations de la condition de coplanarité et de colinéarité. Une des méthodes les plus connues et employées pour résoudre les systèmes polynomiaux est la résolution analytique qui exploite f ainsi que ses dérivées, p. ex. la méthode de Newton qui est itérative, ou encore la minimisation locale de f . L'inconvénient majeur de ces méthodes est du au fait qu'elles nécessitent des valeurs initiales approchées, parfois difficiles à trouver. Une autre façon de trouver les solutions d'un système polynomial est d'avoir recours à une résolution algébrique. Les bases de Gröbner rentrent dans cette catégorie. Il est par ailleurs important de souligner que depuis quelques dizaines d'années, une avancée remarquable a été faite dans ce domaine, grâce à l'augmentation de la puissance de calcul.

Un système est dit de « dimension zéro » si l'ensemble de ses solutions dans un corps

algébriquement clos est fini. Dans ce cas, les solutions ne dépendent pas du corps algébriquement clos choisi. C'est la seule situation accessible au calcul purement numérique. Encore faut-il que le nombre d'équations soit égal au nombre de variables, et même dans ce cas les performances des solveurs numériques sont le plus souvent très médiocres en raison d'instabilités numériques inévitables. Les techniques algébriques subdivisent le problème de la résolution en deux étapes : la première consiste à transformer le système en un ou plusieurs systèmes équivalents mais mieux adaptés et qui constituent ce que l'on peut appeler une solution algébrique. La deuxième étape consiste, dans le cas où on travaille dans un sous-corps des complexes, à calculer les valeurs numériques des solutions à partir de la solution algébrique.

Le calcul de la solution algébrique se décompose elle-même généralement en plusieurs étapes. La première est le plus souvent le calcul d'une base de Gröbner ; aussi de nombreux chercheurs ont assimilé pendant plusieurs années le calcul des bases de Gröbner à la résolution des systèmes polynomiaux. [FAUGERE99] [COX 97] [COX 98].

« Une idée sous-jacente à la notion de base de Gröbner est une généralisation de la division euclidienne (que l'on connaît pour les polynômes à une variable) à des situations avec plusieurs variables. Si k est un corps, pour tous F et G de $k[X]$, il existe d'unique quotient et reste Q, R tels que $G = QF + R$, avec $\deg R < \deg F$. L'algorithme de division euclidienne est un processus itératif permettant de calculer le reste R .

Notons $\deg F = D$ et $\deg G = D'$ et supposons que D' est au moins égal à D (sinon, il n'y a rien à faire). La boucle élémentaire de la division euclidienne de G par F consiste à réécrire G modulo F de manière à faire disparaître son terme de plus haut degré. Pour cela, on pose la soustraction $G - \text{coeff}(G, D') / \text{coeff}(F, D) X^{D-D'} F$, ce qui fait descendre le degré d'au moins 1. On itère ensuite le procédé jusqu'à ce que le degré descende en dessous de celui de F .

Avec plus de recul, l'idée principale derrière ce procédé consiste à associer aux polynômes F et G des termes de tête, à savoir les termes de plus haut degré. La division avec reste de G par F passe alors par une suite de réécritures : tant que le terme de tête de F divise le terme de tête de G , on peut annuler ce dernier par une combinaison linéaire adéquate. La technologie des bases de Gröbner est une extension de ce processus en plusieurs variables [SCHOST]. »

La solution algébrique [SPACE] peut prendre diverses formes, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. La forme la mieux adaptée au calcul des solutions numériques est la RUR [Rouillier99] (Représentation Univariée Rationnelle) qui consiste en une équation en une variable $f(t) = 0$ (ou t est souvent une variable auxiliaire) et en l'expression des autres variables comme fractions rationnelles en t (quotients de deux polynômes). À partir de la RUR, le calcul des valeurs numériques des solutions revient à calculer les racines

d'un polynôme univarié. Ce n'est toutefois pas aussi simple qu'il n'y paraît car c'est généralement un polynôme de degré élevé ayant de très grands coefficients. Les algorithmes et les implantations développés par J.-C. Faugere [FAUGERE99] et F. Rouillier [ROUILLIER99] sont très performants. Ils permettent couramment de résoudre des systèmes ayant de l'ordre d'un millier de solutions [SALSA].

3.2. Résolution des systèmes polynomiaux à l'aide de la librairie SALSA

Comme il a été dit, la librairie gratuite SALSA est à ce jour une des librairies les plus performantes pour le calcul des bases de Gröbner, ainsi que pour le calcul des solutions réelles.

Dans cette partie nous allons, tout en donnant les éléments mathématiques nécessaires, préciser les indications nécessaires pour l'utilisation de cette librairie.

Supposons que $R = K[x_1, \dots, x_n]$ est un anneau de polynômes où K est un corps arbitraire. Soit

$f_1, \dots, f_k \in R$ un ensemble de K polynômes et soit

$I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ un idéal de R produit par les f_i . Avant

tout, nous avons besoin d'un ordre de rangement des monômes sur R . Il existe plusieurs ordres, nous allons donner la définition de deux de ces ordres principaux :

Degré lexicographique (Lex)

$$X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} <_{Lex} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n} \Leftrightarrow \exists i_0 \leq n, \begin{cases} \alpha_i = \beta_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, i_0-1 \\ \alpha_{i_0} < \beta_{i_0} \end{cases}$$

Degré lexicographique inverse (DRL)

$$X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} <_{DRL} X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n} \Leftrightarrow X_0^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} X_1^{-\alpha_n} \dots X_n^{-\alpha_1} <_{Lex} X_0^{\sum_{i=1}^n \beta_i} X_1^{-\beta_n} \dots X_n^{-\beta_1}$$

Bien que l'ordre lexicographique soit beaucoup plus simple et intuitif à comprendre, en revanche on note que dans beaucoup de problèmes il est plus intéressant de travailler avec l'ordre DRL, qui peut réduire de manière considérable le temps de calcul de la résolution.

Une fois l'ordre sur les monômes choisi, on peut procéder aux calculs des bases de Gröbner avec l'aide de Maple et de la librairie SALSA de la manière suivante :

(Exemple sur le système de polynômes de la section 2)

with(Gb):with(FGb):with(RS):advance("FGB"):

Ici on importe les librairies de Salsa sous Maple.

Relation qui contient nos 7 équations :

Relation:=[(xa1*(-Tz*(2*c*b+2*d*a))+Ty*(2*b*d-2*c*a))+ya1*(Tz*(1-2*c^2-2*d^2)-Tx*(2*b*d-2*c*a))+za1*(-Ty*(1-2*c^2-2*d^2)+Tx*(2*c*d+2*b*a)))*xa2+(xa1*(-Tz*(1-2*b^2-2*d^2)+Ty*(2*c*d+2*b*a))+ya1*(Tz*(2*c*b-2*d*a)-Tx*(2*c*d+2*b*a))+za1*(-Ty*(2*c*b-2*d*a)+Tx*(1-2*b^2-2*d^2)))*ya2+(xa1*(-Tz*(2*c*d-2*b*a)+Ty*(1-2*b^2-2*c^2))+ya1*(Tz*(2*b*d+2*c*a)-Tx*(1-2*b^2-2*c^2))+za1*(-Ty*(2*b*d+2*c*a)+Tx*(2*c*d-2*b*a)))*za2,(xb1*(-Tz*(2*c*b+2*d*a)+Ty*(2*b*d-2*c*a))+yb1*(Tz*(1-2*c^2-2*d^2)-Tx*(2*b*d-2*c*a))+zb1*(-Ty*(1-2*c^2-

2*d^2)+Tx*(2*c*b+2*d*a)))*xb2+(xb1*(-Tz*(1-2*b^2-2*d^2)+Ty*(2*c*d+2*b*a))+yb1*(Tz*(2*c*b-2*d*a)-Tx*(2*c*d+2*b*a))+zb1*(-Ty*(2*c*b-2*d*a)+Tx*(1-2*b^2-2*d^2)))*yb2+(xb1*(-Tz*(2*c*d-2*b*a)+Ty*(1-2*b^2-2*c^2))+yb1*(Tz*(2*b*d+2*c*a)-Tx*(1-2*b^2-2*c^2))+zb1*(-Ty*(2*b*d+2*c*a)+Tx*(2*c*d-2*b*a)))*zb2,(xc1*(-Tz*(2*c*b+2*d*a)+Ty*(2*b*d-2*c*a))+yc1*(Tz*(1-2*c^2-2*d^2)-Tx*(2*b*d-2*c*a))+zc1*(-Ty*(1-2*c^2-2*d^2)+Tx*(2*c*b+2*d*a)))*xc2+(xc1*(-Tz*(1-2*b^2-2*d^2)+Ty*(2*c*d+2*b*a))+yc1*(Tz*(2*c*b-2*d*a)-Tx*(2*c*d+2*b*a))+zc1*(-Ty*(2*c*b-2*d*a)+Tx*(1-2*b^2-2*d^2)))*yc2+(xc1*(-Tz*(2*c*d-2*b*a)+Ty*(1-2*b^2-2*c^2))+yc1*(Tz*(2*b*d+2*c*a)-Tx*(1-2*b^2-2*c^2))+zc1*(-Ty*(2*b*d+2*c*a)+Tx*(2*c*d-2*b*a)))*zc2,(xd1*(-Tz*(2*c*b+2*d*a)+Ty*(2*b*d-2*c*a))+yd1*(Tz*(1-2*c^2-2*d^2)-Tx*(2*b*d-2*c*a))+zd1*(-Ty*(1-2*c^2-2*d^2)+Tx*(2*c*b+2*d*a)))*xd2+(xd1*(-Tz*(1-2*b^2-2*d^2)+Ty*(2*c*d+2*b*a))+yd1*(Tz*(2*c*b-2*d*a)-Tx*(2*c*d+2*b*a))+zd1*(-Ty*(2*c*b-2*d*a)+Tx*(1-2*b^2-2*d^2)))*yd2+(xd1*(-Tz*(2*c*d-2*b*a)+Ty*(1-2*b^2-2*c^2))+yd1*(Tz*(2*b*d+2*c*a)-Tx*(1-2*b^2-2*c^2))+zd1*(-Ty*(2*b*d+2*c*a)+Tx*(2*c*d-2*b*a)))*zd2,(xe1*(-Tz*(2*c*b+2*d*a)+Ty*(2*b*d-2*c*a))+ye1*(Tz*(1-2*c^2-2*d^2)-Tx*(2*b*d-2*c*a))+ze1*(-Ty*(1-2*c^2-2*d^2)+Tx*(2*c*b+2*d*a)))*xe2+(xe1*(-Tz*(1-2*b^2-2*d^2)+Ty*(2*c*d+2*b*a))+ye1*(Tz*(2*c*b-2*d*a)-Tx*(2*c*d+2*b*a))+ze1*(-Ty*(2*c*b-2*d*a)+Tx*(1-2*b^2-2*d^2)))*ye2+(xe1*(-Tz*(2*c*d-2*b*a)+Ty*(1-2*b^2-2*c^2))+ye1*(Tz*(2*b*d+2*c*a)-Tx*(1-2*b^2-2*c^2))+ze1*(-Ty*(2*b*d+2*c*a)+Tx*(2*c*d-2*b*a)))*ze2,a^2+b^2+c^2+d^2-1,Tx^2+Ty^2+Tz^2-1]:

Ensuite nous procédons au calcul des bases de Gröbner de la manière suivante :

```
gb_drl:=gbasis(Relation,DRL([a,b,c,d,Tx,Ty,Tz])):
```

La connaissance des bases de Gröbner nous donne de précieuses informations sur le système polynomial initial. La première est de savoir si oui ou non ce système contient au moins une solution. Si le système n'a pas de solutions, sa base de Gröbner sera égale à 1 (théorème de Hilbert).

Une fois que nous nous sommes assurés que notre système possède des solutions, nous testons si le nombre de ces solutions est fini ou non avec l'aide de la commande :

```
dim:= dimension(gb_drl);
```

Si dim est égal à zéro alors notre système a une dimension de zéro avec un nombre fini de solutions.

Une fois ces étapes effectuées, encore faut-il calculer les solutions réelles de notre système. C'est là que nous allons employer le RUR, de la manière suivante :

```
rr:=rs_rur(gb_drl,verbose=1,output=poly):
sols:=rs_isolate(rr,vars=vars,order="RUR",
scalars=floating_point);
```

Sols contient donc tous nos paquets de solutions pour les paramètres de l'orientation relative. Ce nombre de solutions peut être défini avec la commande suivante :

```
nbSols := nops(sols) ;
```

Avec cette configuration pour la résolution de l'orientation relative nous obtenons 80 solutions.

Nous avons vu qu'il est très simple à partir de la librairie Salsa et de Maple de résoudre des systèmes polynomiaux multivariés.

La contrainte restante est de travailler dans l'environnement de Maple, ce qui peut être contraignant pour des applications génériques dans des programmes sous C++, Java ou encore Fortran. Fort heureusement, Maple offre la possibilité d'interfacer ses fonctions en dehors de son environnement avec l'aide de son module Open Maple. Dans le cadre de notre recherche nous avons employé avec succès ces outils puissants de calcul de bases de Gröbner dans notre environnement C++, ce qui nous a permis d'avoir un programme générique. Pour plus d'informations sur la fonctionnalité d'Open Maple nous invitons le lecteur à regarder la référence suivante [GEDDES2005].

4. Algorithme et résolution.

Maintenant que tous les éléments de géométrie et de mathématiques sont précisés, il est possible de décrire les différentes étapes algorithmiques de la stratégie de détermination de l'orientation relative.

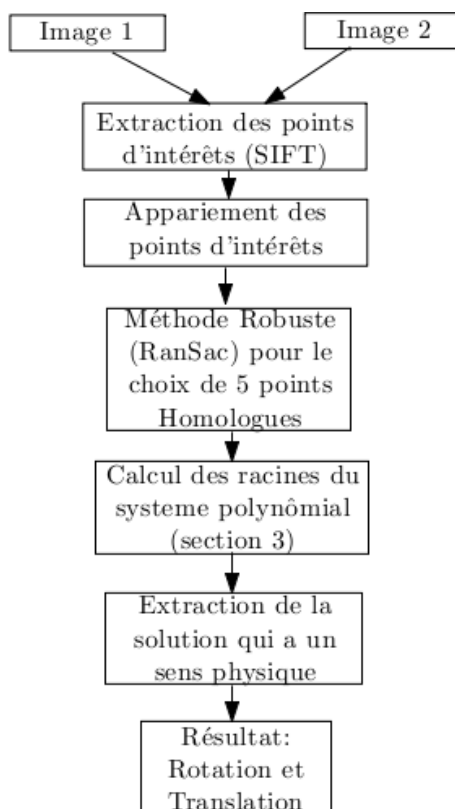


Figure 2: les différentes étapes de l'algorithme de résolution de l'orientation relative.

4.1. Extraction et appariement des points d'intérêts des points d'intérêts.

L'automatisation de l'extraction des points d'intérêt est directement liée à l'emploi d'images numériques, et l'un des premiers outils utilisés a été publié par Harris en 1988 [HARRIS88] : son détecteur est basé sur l'extraction automatique de coins, et si assez rapidement ses insuffisances ont été connues, sa simplicité d'implémentation en a fait un outil très employé. Néanmoins il a fallu attendre les résultats de deux décennies de recherche pour disposer d'une méthode réellement plus fiable, la méthode SIFT.

La méthode SIFT de Lowe, 2004 (*Scale Invariant Feature Transform*) [LOWE04] permet d'obtenir des points d'intérêts dont la détermination est très peu sensible à des changements, même importants, entre les images : de facteurs d'échelle et de changement de points de vues, et aussi assez peu sensibles aux variations locales de radiométrie (différences de point de vue, etc.), toutes sortes de situations rencontrées très fréquemment en vision par ordinateur et où le détecteur de Harris est souvent tenu en échec. Elle est basée, entre autres, sur la considération suivante : dans une image, appliquer un changement d'échelle à un détail dont la répartition de densités radiométriques présente une forme gaussienne fournit un détail identique, à un facteur d'échelle radiométrique près.

Le traitement SIFT commence, pour chaque image, par une convolution successive avec des imagerie de gaussiennes de tailles progressivement croissantes. Puis une soustraction entre ces images convoluées successives est effectuée, permettant d'identifier un premier ensemble de points candidats, déjà a priori très peu sensibles aux changements d'orientation et d'échelle. Un premier filtrage est alors effectué pour éliminer les candidats ayant un contraste faible, ou qui sont mal localisables car situés sur les contours.

L'étape suivante consiste, pour chacun de ces candidats, à identifier une ou plusieurs directions particulières au sein des gradients effectués dans toutes les directions autour du point. On construit alors, en utilisant ces directions comme références, un descripteur des gradients de l'environnement immédiat du point, sorte de carte d'identité du point en généralement 128 valeurs numériques, extrêmement peu sensible à l'orientation et à l'échelle du voisinage, ainsi qu'aux différences d'éclairage comme on le comprend aisément.

L'appariement consistera dans un premier temps à calculer toutes les distances euclidiennes à l'aide des 128 vecteurs entre tous les points de l'image 1 et tous les points de l'image 2. Ensuite pour chaque point de l'image 1, les deux points les plus proches (au sens du produit scalaire : points les plus comparables) sur l'image 2 sont extraits. Si le premier plus proche voisin est au moins 6 fois plus près que le deuxième plus proche voisin, alors le premier voisin est retenu comme étant l'homologue du point sur l'image 1. Il est clair que ce processus est exponentiel en fonction du nombre de points de chaque image. C'est pour cela qu'il est indispensable d'utiliser des outils de type kd-tree qui permettent d'augmenter de manière considérable la vitesse de détermination des plus proches voisins. Pour

ce fait, il est possible d'utiliser la librairie C++ au nom de ANN [MOUNT06] qui est particulièrement optimisée dans ce but. Elle permet aussi la recherche dans un espace à plusieurs dimensions, en l'occurrence ici 128. A titre indicatif l'appariement avec cette librairie pour 12 000 points d'intérêts met quelques secondes pour un PC courant datant de 2007.

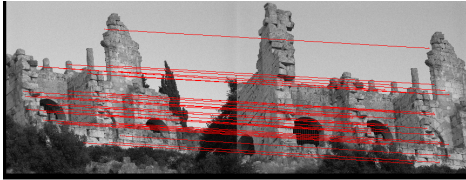


Figure 3: exemple d'appariement des points SIFT avec l'aide de la librairie ANN (crédit photo Y.Egels)

4.2. Choix robuste de 5 points homologues

Bien que l'appariement avec la méthode kd-tree soit très efficace, il reste toujours une petite probabilité que les points appariés soient faux. C'est pour cette raison qu'il est important d'avoir recours à des méthodes d'estimation robuste. Dans la présente application, la méthode statistique désormais classique Ransac (pour RANdom SAmple Consensus) [FISCHLER81] est utilisée. L'objectif est de pouvoir estimer les paramètres inconnus, en l'occurrence ici la rotation et la translation, par un nombre minimum de points. 5 points sont choisis aléatoirement. A l'aide du modèle (condition de coplanarité) estimé, on évalue quelles autres observations peuvent être considérées comme compatibles avec ce modèle. En fonction de la proportion de points faux (issus de l'appariement initial effectué sur les points SIFT), le nombre d'itérations de ce processus est plus ou moins important. On qualifie finalement la solution qui agrège le plus grand nombre de points possible.

Il a été constaté que le nombre de points appariés à tort était de l'ordre de 5% de la totalité des points. Selon le modèle statistique de la méthode RANSAC, il faut donc procéder à 4 tirages pour assurer la probabilité de 0.99 qu'au moins un de ces tirages contienne 5 points correctement appariés. Et plus la proportion de faux points homologues est élevée, plus il faudra de tirages [HARTLEY03]. D'ailleurs, il est important de noter que cette méthode de filtrage RANSAC portant sur 5 objets nécessite considérablement moins d'itérations que si on doit l'appliquer, par exemple, sur 8 objets. Ceci plaide aussi pour une recherche de méthode de résolution portant sur ce nombre minimal de 5 points.

Dans cette étape 5 points sont donc aléatoirement tirés, avec une distance minimale de 100 pixels entre ces points dans l'image. Ces 5 points sont placés dans les équations polynomiales décrites dans la partie 2. Toutes les racines possibles du polynôme sont calculées avec l'aide des outils mathématiques évoqués précédemment (section 3).

4.3. Extraction de la solution qui a le meilleur sens physique.

A l'issue de l'étape 4.2, toutes les solutions possibles du système de polynômes sont calculées. Ces solutions sont purement mathématiques. Parmi ces solutions, une et seulement une seule a un sens correspondant à la géométrie réelle de l'acquisition. Le premier test à effectuer est de vérifier pour chaque ensemble de solutions (rotation + translation) celles qui permettent d'obtenir, après triangulation, des coordonnées positives, en d'autres termes, on s'assure que les points objets sont devant la caméra. Ce premier tri permet de rejeter toutes les configurations qui intersectent les rayons des points homologues derrière l'image. En général après cette étape la moitié des solutions sont écartées. Ensuite avec toutes les configurations, on calcule une profondeur moyenne pour tous les points objets. Les fausses solutions donnent presque toujours des points qui sont très proches du plan focal. Rappelant que la longueur de la base est prise égale à 1, pour chaque configuration le rapport base/profondeur est calculé. Il est clair que si la profondeur moyenne des points objet est trop petite ce rapport B/H sera très grand, ce qui en terme de configuration photogrammétrique est aberrant. Toutes les configurations qui donneront une profondeur moyenne inférieure à 1 sont rejetées. En général après cette étape il ne reste que 2 ou 3 candidats. La dernière étape consiste à garder la solution qui a agrégé le plus grand nombre de points.

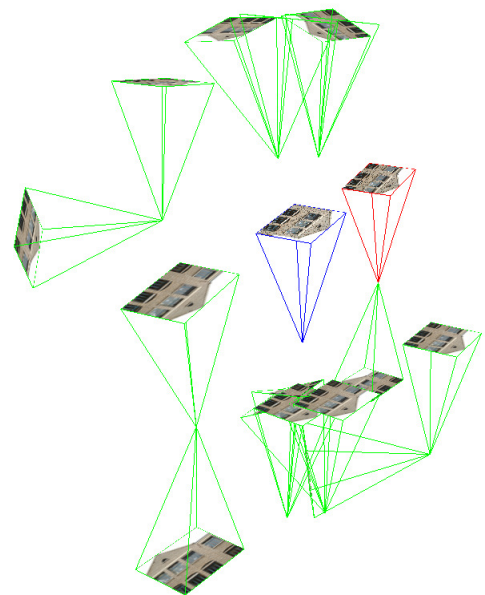


Figure 4: Illustration des différentes solutions en vert. En bleu l'image de gauche qui sert de référence, en rouge la meilleure solution extraite parmi les autres solutions.

D'autres méthodes existent pour trouver la bonne solution parmi toutes celles produites par les résolutions directes, mais en général elles consistent à faire intervenir une troisième image [NISTER04]. Dans la

méthodologie présentée ici, on n'emploie pas cette solution, et le travail est mené avec seulement deux images.

5. Résultats et évaluation

5.1. Configuration de la simulation

Dans cette partie l'algorithme est confronté à la méthode de résolution des 5 points de Stewenius. Comme il peut être vu dans la Figure 5, des points synthétiques ont été simulés. Les deux cas de figure de la stéréo normale (base selon X) et de la stéréo avant-arrière (base selon Z) ont été traités. Pour ces évaluations nous avons repris les valeurs de simulations décrites dans [NISTER2004] (cf. table 1), ces valeurs sont considérées comme un cas particulièrement défavorable.

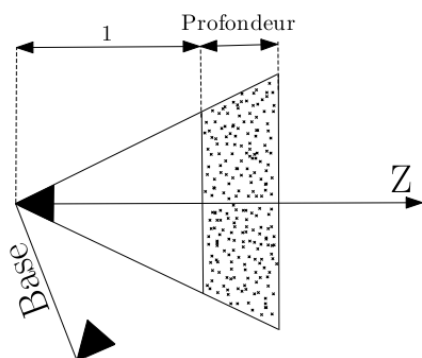


Figure 5: Schéma général de la simulation. L'axe des Z est perpendiculaire à l'objet plan (si cet objet était une façade, cet axe Z serait donc horizontal et perpendiculaire à celle-ci, ainsi que l'axe des X qui serait parallèle à la façade, l'axe Y étant alors vertical).

Profondeur	0.5
Base	0.1
Dimension de l'image	352 x 288 (CIF)
Ecart-type du bruit	De 0 à 1 pixel
Champ de vue	45 degrés

Tableau 1 : Une des configurations les plus défavorables. Les longueurs sont données en unités arbitraires, l'ensemble étant invariant par changement d'échelle.

Une autre configuration consiste à prendre comme valeur de la base 0.3, et une profondeur qui variera entre 0 et 2. Cette configuration bien plus favorable pour la résolution du problème, est dénommée « facile ».

Les différentes étapes de la simulation sont les suivantes :

- 1- 5000 points terrain sont générés de manière aléatoire selon la configuration du tableau 1, ou dans la configuration dite facile. Dans certains cas la profondeur varie entre 0 et 0.5 ou 2 pour

des scènes dites normales. Un autre cas entièrement coplanaire sera traité.

- 2- Les points terrain sont projetés sur les deux plans images à l'aide de l'équation de colinéarité.
- 3- Les coordonnées des points homologues sur chaque image sont bruitées avec un bruit gaussien d'écart type variant de 0 à 1 pixel, par pas de 0.1 pixel, pour chaque configuration.
- 4- L'angle formé entre la vraie base et la base estimée est une valeur qui est retenue ici pour quantifier l'erreur de l'orientation relative.
- 5- 100 tirages sont alors effectués pour chaque configuration.

Remarque : Dans les simulations faites, il est important de préciser que la rotation entre les deux axes optiques est toujours très bien calculée. Ce qui fait la différence entre les différentes méthodes, c'est la précision d'estimation sur l'orientation de la base, et c'est donc le critère d'évaluation qui a été retenu de façon prioritaire.

5.2. Résultat sur des scènes selon la configuration dite « facile »

L'algorithme proposé dans cet article est confronté à la méthode des 5 points de Stewenius [STEWENIUS06] dans un premier temps dans une configuration dite facile, c'est-à-dire avec une base de 0.3 et une profondeur qui varie entre 0 et 2. La comparaison est menée en utilisant les codes de calcul téléchargeables sur le site de Stewenius [Stewenius2007].

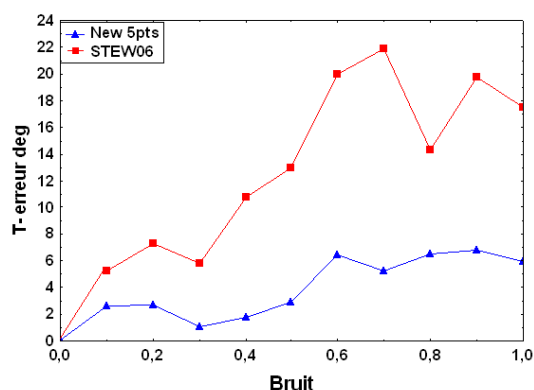


Figure 6 Ici la base est selon X et de valeur 0.3, configuration dite facile compte tenu d'un rapport B/H favorable et d'un objet non plan. Le bruit est exprimé en pixels, et l'axe des Y représente l'erreur (en valeur absolue) sur l'orientation de la base, telle que calculée à partir des images bruitées.

La Figure 6 montre que le nouvel algorithme permet une bonne détermination de l'orientation de la base (T-erreur), l'écart moyen calculé sur une centaine d'essais ne dépassant pas 3° pour un bruit inférieur à 0.5 pixels. Les

déterminations apparaissent comme nettement meilleures que celles obtenues en utilisant le code de calcul de Stewenius. Il reste toutefois dans ces courbes un bruit d'échantillonnage assez important, dû à des simulations qui ont dûes être limitées à 100 tirages pour chaque situation.

La Figure 7 montre des résultats sur une situation de stéréoscopie avant-arrière considérée comme favorable, avec une base de 0.3 suivant Z. Les résultats du nouvel algorithme sont sensiblement équivalents à ceux évoqués Fig. 6, on note toutefois que le gain en qualité de détermination par rapport aux calculs de Stewenius est moindre.

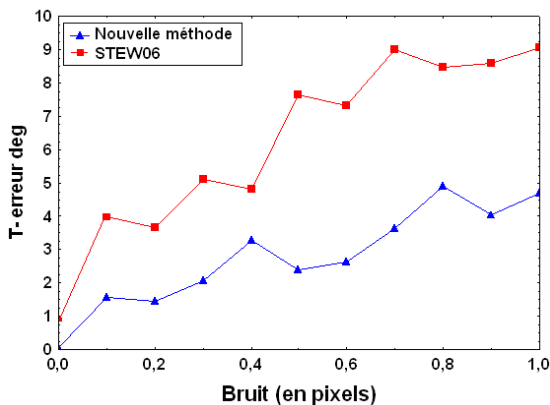


Figure 7 Ici la base est selon Z (T-erreur), de valeur 0.3, configuration dite facile, en stéréoscopie avant-arrière.

5.3. Résultat sur des scènes selon la configuration défavorable (tableau 1) avec un objet plan.

Plusieurs surfaces sont connues sous le nom de "dangereuses" [Philip98] la raison de cette appellation est due au fait que si les points choisis pour l'estimation de l'orientation relative se trouvent sur ce genre de surface, la configuration devient dégénérée. Parmi ces surfaces sont les surfaces planes, et donc de nombreux cas de photogrammétrie architecturale sont défavorables, car les murs peuvent poser problème. Dans la suite une des configurations les plus défavorables a été choisie.

Le cas examiné est alors le suivant : les points objets ont une coordonnée Z constante égale à 2. La base est celle du tableau 1 c'est-à-dire 0.1. Deux cas de géométrie stéréoscopique sont traités. Dans la Figure 8 le déplacement de la base se fait dans direction de l'axe des X (donc parallèle à l'objet). On note que la méthode des 5 points de Nister/Stewenius est très peu robuste à ce genre de configuration. D'ailleurs Sarkis [SARKIS07] a montré dans sa publication cette faiblesse de l'algorithme et conclu qu'il vaut mieux dans de tels cas utiliser une homographie. Par contre avec la méthode présentée dans cet article ce genre de configuration ne pose aucun problème.

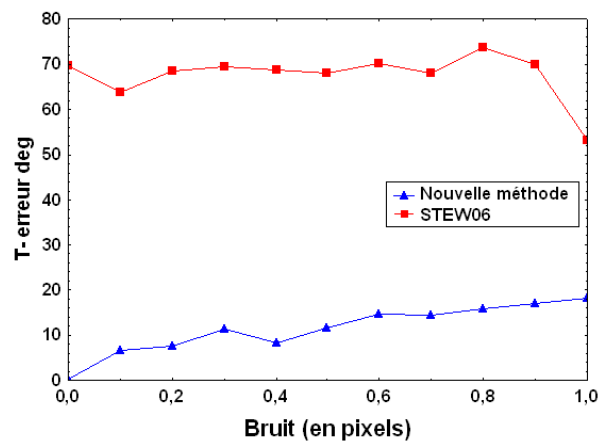


Figure 8 Base selon X de valeur 0.1 avec un objet plan. On note que le nouvel algorithme fonctionne de façon satisfaisante même dans ce cas jugé très défavorable.

Dans la Figure 9 la configuration est la même, mais avec une translation selon l'axe des Z, toujours de valeur 0.1. Cette fois ci, la nouvelle méthode donne des résultats sensiblement équivalents à celle de Stewenius.

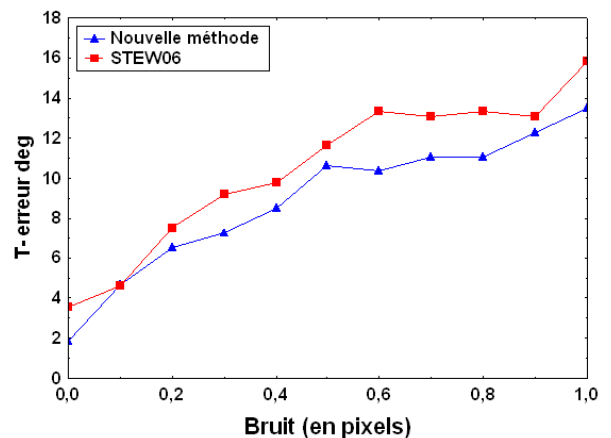


Figure 9. Simulations avec une base selon Z de valeur 0.1, avec un objet plan. Les résultats du nouvel algorithme sont similaires à ceux de la figure 7.

5.4. Résultat sur différentes valeurs de la base

Afin de voir l'impact de la longueur de la base sur la précision de calcul de la translation et rotation, celle-ci a fait l'objet de variations allant jusqu'à 0.35. Pour la translation, en fait la variation de la base commence à 0.05, car les deux méthodes de toute façon normalisent la base à 1, de sorte que la valeur 0 n'a pas de sens.

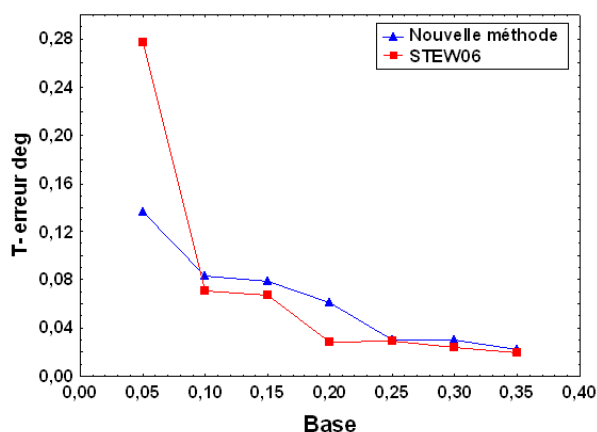


Figure 10. Erreurs sur l'orientation de la base, avec la base selon X et un objet non plan, pour des valeurs de base allant jusqu'à 0.35. On note que le nouvel algorithme fonctionne de façon satisfaisante, avec des résultats très proches de ceux de Stewenius.

Puis l'erreur sur la rotation relative entre les deux images est analysée lorsqu'on fait varier la longueur de la base entre 0 et 0.35. On peut constater à partir de la figure 10 que même pour une longueur de base quasiment nulle (cas images panoramiques), la rotation dans les deux méthodes est très bien déterminée.

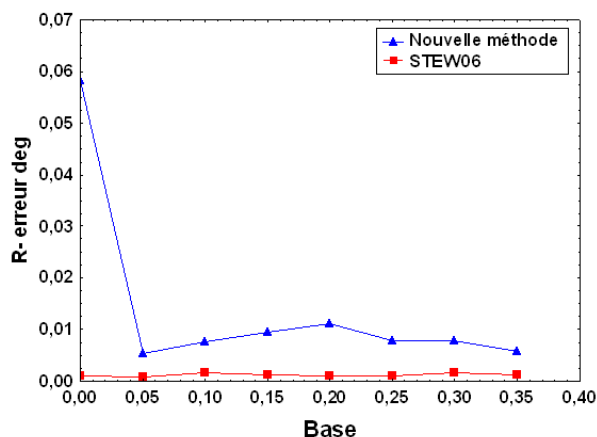


Figure 11. La base est selon l'axe des X, et elle varie jusqu'à 0.35, et c'est l'erreur sur la rotation qui est présentée ici. La méthode de Stewenius est plus précise, mais il faut bien noter que de toutes les façons les résultats sont très bons, restant en dessous de 0.01 degré.

Enfin, on procède à des simulations pour lesquelles la base varie aussi jusqu'à 0.35, mais selon l'axe des Z (stéréoscopie avant-arrière). On note que les résultats, tant pour l'orientation de la base que pour l'orientation, sont tout à fait satisfaisants, l'orientation de la base étant même un peu meilleure que dans la méthode de Stewenius, mais de toutes les façons à un niveau de précision qui ne pose pas de problème (cf Figures 12 et 13).

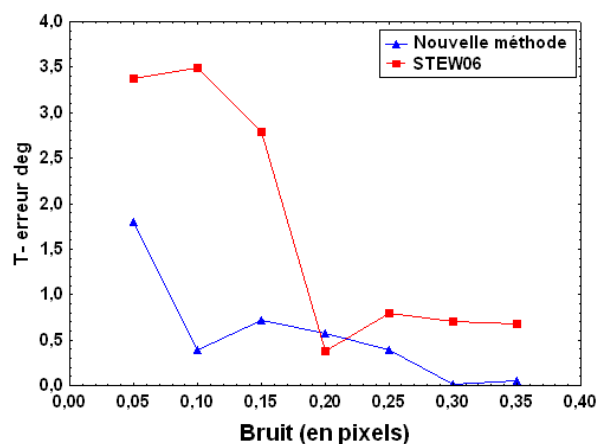


Figure 12. Simulations avec une base variable, orientée suivant l'axe des Z : la restitution de l'orientation de la base est satisfaisante (de l'ordre de 1°), la nouvelle méthode étant un peu plus efficace que la méthode de Stewenius.

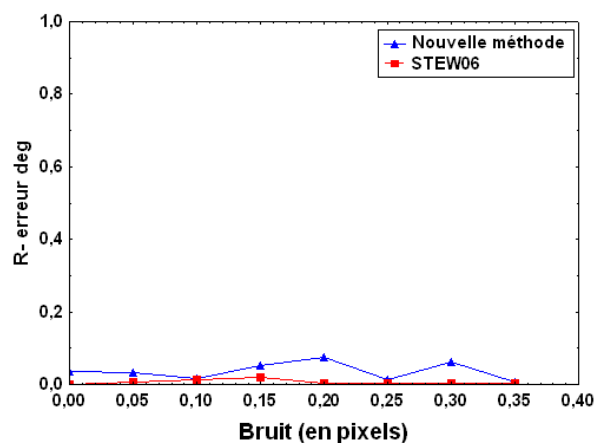


Figure 13. Simulations avec une base variable, orientée suivant l'axe des Z : la restitution de la rotation entre les images est très précise (meilleure que 0.01°), la nouvelle méthode étant ici un peu moins efficace que la méthode de Stewenius, mais à un niveau qui reste d'une précision très satisfaisante.

5.5. Résultat sur un cas réel

Enfin pour finir, quelques résultats sur des cas réels sont présentés à titre d'exemple. Un ensemble d'images ont été acquises sur un bâtiment de l'IGN.

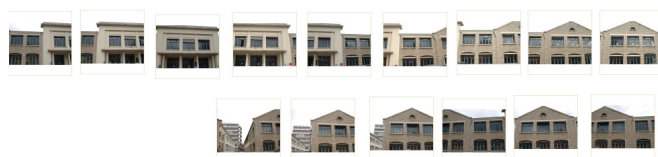


Figure 14. Images acquises



Figure 15. Exemple des points SIFT

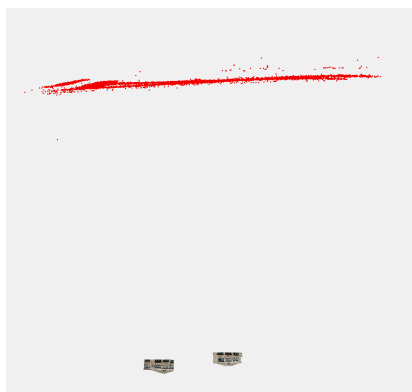
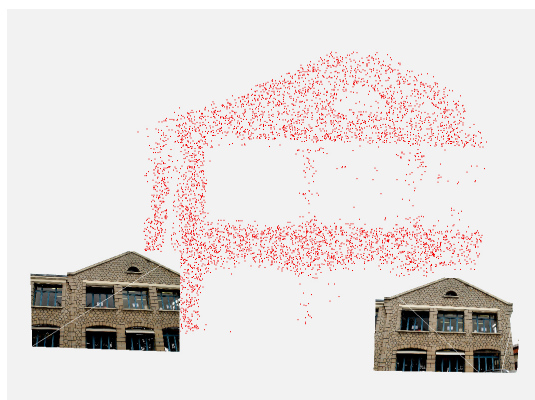


Figure 16. Représentation en 3D, vue horizontalement et verticalement, du nuage de points SIFT triangulés de façon automatique à partir des résultats de la nouvelle méthode. On note sur cet exemple le caractère coplanaire des points, qui correspondent à la façade du bâtiment.



Figure 17 Plusieurs résultats sur le Monastère Saint-Siméon en Syrie (crédit photo : Yves Egels)

6. Conclusion

Dans ce papier, une nouvelle solution pour le calcul direct des paramètres d'orientation relative (rotation et translation) est décrite, utilisant le minimum absolu de 5 points pour résoudre la figure, et sans aucune valeur approchée. Les résultats obtenus au cours des différentes simulations montrent que l'algorithme est assez peu sensible au bruit. Son autre point fort est la robustesse du calcul dans des cas où tous les points sont coplanaires, y compris quand la base est parallèle à l'objet imagé. Cette robustesse est significativement meilleure que celle des résolutions basées sur la matrice essentielle. Ces travaux ouvrent la voie à des applications en photogrammétrie, jusqu'ici utilisées uniquement dans le domaine de la vision par ordinateur. Un des domaines d'emploi prévisible est celui de la photogrammétrie architecturale, qui est en pleine expansion actuellement compte tenu des besoins de représentations 3D des zones urbaines. En outre, toujours pour des applications photogrammétriques classiques, ce processus de calcul peut être employé pour fournir des valeurs approchées à des calculs d'aérotriangulation, complétant ainsi les outils modernes de prises de vues aériennes comme les centrales inertielles et les mesures GPS.

Remerciements

Nous tenons à remercier ici Erwan Houzay, Bertrand Cannelle et Arnaud Le Bris, du Laboratoire MATIS, pour l'aide apportée à l'acquisition des images ayant servi aux tests et aux calculs de mise en œuvre de la méthode SIFT. Nous tenons aussi à remercier Amir Hashemi de l'Université Technique d'Isfahan pour son aide sur les bases de Gröbner.

Nos remerciements vont également à Yves Egels pour la fourniture d'images sur le site de Saint Siméon en Syrie.

Bibliographie

Batra, Nabbe, Hebert, 2007. *An Alternative Formulation for Five Point Relative Pose Problem*, wmv, IEEE Workshop on Motion and Video Computing (WMVC'07).

Buchberger, B., 1965. *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*. Mathematical Institute. Austria, University of Innsbruck. Thèse de doctorat.

Cox, D., Little, J., O'Shea, D., 1997. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag New York.

Cox, D., Little, J., O'Shea, D., 1998. *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York.

Demazure M., 1988. Sur Deux Problèmes de Reconstruction, *Technical Report No 882*, INRIA, France.

Faugère, J. C. 1999. *A New Efficient Algorithm for Computing Gröbner bases (F_4)*. Journal of Pure and Applied Algebra 139, pp. 61-88.

Faugeras O. 1993. *Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint*, MIT Press.

Faugeras O., Maybank S., 1990. *Motion from Point Matches: Multiplicity of Solutions*, IJCV, 4(3):225-246.

Fischler, M., Bolles, R., 1981. *Random Sample Consensus: a Paradigm for Model Fitting with Application to Image Analysis and Automated Cartography*, Commun. Assoc. Comp. Mach. 24, pp.381-395.

Geddes, K., Labahn, G., Monagan, K. M, 2005. *Maple 10 Advanced Programming Guide*, Maplesoft.

Harris, C. and Stephens, M. 1988. *A combined corner and edge detector*. In Fourth Alvey Vision Conference, Manchester, UK, pp. 147-151

Hartley R., Zisserman, A., 2000. *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-62304-9.

Heyden A., Sparr G. 1999. *Reconstruction from Calibrated Cameras - a New Proof of the Kruppa-Demazure Theorem*, Jour. of Mathematical Imaging & Vision, pp.10:1-20.

Hongdong L. Hartley R., 2006. *Five-Point Motion Estimation Made Easy, Pattern Recognition*. ICPR 2006. 18th International Conference on Volume 1, Issue , pp.630 – 633.

Kalantari, M., Jung, F., 2008. Estimation automatique de l'orientation relative en imagerie terrestre. *Revue XYZ*, n°114, pp. 27-31.

Kasser M., Egels Y., 2001. *Photogrammétrie Numérique*. Hermes-Sciences.

Kruppa, E., 1913. *Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit Innerer Orientierung*, Sitz.-Ber. Akad.Wiss.,Wien, Math. Naturw. Kl., Abt. IIa., 122 pp.1939-1948.

Longuet-Higgins, H., 1981. *A Computer Algorithm for Reconstructing a Scene from Two Projections*, Nature, 293(10) pp.133-135.

Lowe, D. G. 2004, *Distinctive image features from scale-invariant keypoints*, Int. Journal of Computer Vision 60(2), pp. 91–110.

Ma Y., Soatto S., Košecá J. and Sastry S. S. 2004. *An Invitation to 3-D Vision*. Springer.

Maybank S. 1993. *Theory of Reconstruction from Image Motion*, Springer Verlag.

Moffitt, F.H., and Mikhail, E.M. 1980, *Photogrammetry*, Cambridge: Harper&Row third edition.

Mount D.M. et Arya S., 2006. ANN, *A Library for Approximate Nearest Neighbour Searching*.
<http://www.cs.umd.edu/~mount/ANN/>, dernière visite octobre 2006.

Nister, D., 2004. *An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 26(6) pp.756-770.

Philip, J., 1996. *A Non-Iterative Algorithm for Determining all Essential Matrices Corresponding to Five Point Pairs*, Photogrammetric Record, 15(88) pp.589-599.

Philip, J., 1998. *Critical Point Configurations of the 5-, 6-, 7-, and 8-point Algorithms for Relative Orientation*, TRITA-MAT-1998-MA-13.

Rouillier, F. 1999. "Solving zero-dimensional systems through the rational univariate representation". *Journal of Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, pp. 433-461.

SALSA (Solvers for ALgebraic Systems and Applications). Equipe INRIA (Rocquencourt unit) et LIP6 (Laboratoire d'informatique de Paris 6) <http://fbars.lip6.fr/salsa/index.php>

Sarkis, M.; Diepold, K.; Huper, K., 2007. *A Fast and Robust Solution to the Five-Point Relative Pose Problem using Gauss-Newton Optimization on a Manifold*. Acoustics, Speech and Signal Processing, 2007. ICASSP 2007, pp:

Segvic, S., Schweighofer, G., and Pinz, A., 2007. *Performance evaluation of the five-point relative pose with emphasis on planar scenes*, In *Proceedings of AAPR/OAGM*, Schloss Krumbach, Austria, pp.33-40.

Schost E., cours de mathématique de l'école Polytechnique. <http://www.csd.uwo.ca/~eschost/>, dernière visite décembre 2007.

SPACE, Systèmes Polynomiaux, Arithmétiques, Calculs Efficaces et Sûrs. Projet SPACE. <http://www.spaces.lip6.fr/>, dernière visite décembre 2007.

Stewénius, H., Engels, C., and Nister, D. 2006. *Recent developments on direct relative orientation*. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 60 : pp. 284–294. <http://vis.uky.edu/~stewe/FIVEPOINT/> dernière visite décembre 2007.

Sturm R., 1869. *Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen Zweiten Grades*, *Math. Annalen* 1, pp. 533-573.

Triggs B., 2000. *Routines for Relative Pose of Two Calibrated Cameras from 5 Points*, *Technical Report*, <http://www.inrialpes.fr/movi/people/Triggs> INRIA, France.

Wolf, P.R., de Witt, B., 2000. *Elements of Photogrammetry with Applications in GIS*, McGraw-Hill.